La notation positionnelle fluide

Que se passe-t-il si l'on autorise l'écriture positionnelle en base 10 avec des chiffres supplémentaires, notés $\underline{0}$, $\underline{1}$, $\underline{2}$, $\underline{3}$, $\underline{4}$, $\underline{5}$, $\underline{6}$, $\underline{7}$ et $\underline{8}$, représentant les nombres 10 à 18 ?

Il est alors possible d'écrire un nombre sous plusieurs formes. Par exemple, 97 peut s'écrire 8$\underline{7}$ (8 dizaines plus 17 unités), ou encore 2003 peut s'écrire 199$\underline{4}$. Parce que les quantités représentées par les chiffres peuvent déborder librement d'une colonne à l'autre, nous appelons ce système la notation positionnelle fluide.

Bien qu'elle ne permette plus de reconnaître un nombre immédiatement, ni de facilement comparer deux nombres, la notation fluide présente certains avantages ; elle apporte aussi un point de vue assez surprenant sur la notation usuelle. Nous allons ainsi montrer que l'on peut écrire -1 sous la forme a priori aberrante de ...9999, soit une infinité de 9 vers la gauche.

1. Soustraction et addition sans retenues

Premier avantage, de nature pédagogique et pratique, on peut maintenant poser des soustractions sans utiliser de retenues. Pour ainsi soustraire le nombre B du nombre A, il suffit d'écrire A de façon à ce que chacun de ses chiffres soit égal ou supérieur au chiffre de B dans la même colonne, ce qui est toujours possible si A est supérieur à B.

Posons par exemple

$$\begin{array}{ll} & 407 \\ - & 238 \end{array}$$

Cela peut s'écrire

$$\begin{array}{ll} & 39\underline{7} \\ - & 238 \end{array}$$

et l'on a directement le résultat, 169, en faisant la différence colonne par colonne, sans retenues. Le fait qu'il n'y ait pas d'interférence entre les colonnes pendant l'opération permet de la faire dans un ordre quelconque, par exemple en commençant par les centaines, ou même les dizaines.

L'algorithme de gestion des retenues a été remplacé par la réécriture préalable du nombre A.

Le résultat peut apparaître en notation fluide, par exemple 407 – 230, réécrit 39$\underline{7}$ – 230, donne 16$\underline{7}$. Pour retrouver un nombre familier, il faut alors se débarrasser du chiffre $\underline{7}$, c'est-à-dire 17, dans la colonne des unités en ne gardant que le 7 et en ajoutant 1 aux dizaines. On retrouve bien 177.

L'addition de deux nombres se fait également sans retenues. Par exemple :

$$\begin{array}{ll} & 658 \\ + & 427 \\ = & \underline{0}7\underline{5} \end{array}$$

c'est à dire 1085.
Là encore, on peut additionner les colonnes indépendamment, dans un ordre quelconque.

2. <u>Soustraction avec un résultat négatif</u>

Prenons une liberté supplémentaire : dans la colonne la plus à gauche, autorisons le chiffre -1, que nous notons ¬. Nous pouvons maintenant poser la soustraction

$$\begin{array}{lr} & 238 \\ - & 407 \end{array}$$

en l’écrivant

$$\begin{array}{lr} & \neg\underline{2}38 \\ - & 407 \\ = & \neg 831 \end{array}$$

Il est en effet toujours possible de remplacer le chiffre de gauche *n* par les deux chiffres $\neg\underline{n}$

Par exemple, le nombre 28 (c’est à dire 20 + 8) accepte comme notation fluide $\neg\underline{2}8$ puisque -100 + 120 + 8 est bien égal à 28.

Avec le chiffre ¬ il est donc possible de poser la soustraction A-B quand B > A, ce qui est impossible avec l’algorithme habituel (on apprend à poser la soustraction B-A, puis à prendre l’opposé du résultat). En notation fluide, le calcul est strictement le même, que B soit inférieur ou supérieur à A .

Il reste maintenant à retrouver la forme habituelle du nombre ¬831

Nous devons pour cela nous débarrasser du ¬. Comme nous savons que ¬831 est négatif, il est naturel de calculer son opposé en le soustrayant de zéro. L’astuce est de noter le zéro en utilisant aussi ¬. Nous avons vu que *n* peut toujours s’écrire $\neg\underline{n}$ et 0 ne fait pas exception ; nous pouvons donc poser

$$\begin{array}{lr} & \neg\underline{0} \\ - & \neg 831 \end{array}$$

Ceci nous donne une perspective, cependant, le premier ¬ n’est pas dans la bonne colonne.

Remarquons alors que ¬9 = ¬.

En effet, -10 + 9 vaut bien -1, c’est à dire ¬. Et récursivement, il est clair que ¬ peut aussi s’écrire ¬99, ou bien ¬999, en fait avec autant de 9 que l’on veut.

Nous pouvons donc poser

$$\begin{array}{lr} & \neg 99\underline{0} \\ - & \neg 831 \\ = & 169 \end{array}$$

ce qui nous montre que ¬831 représente -169 (ce qui est bien égal à 238-407).

Nous avons, au passage, trouvé un algorithme permettant de noter l’opposé de n’importe quel nombre en forme fluide : il suffit de prendre le complément à 10 du premier chiffre non nul en partant de la droite, et le complément à 9 des chiffres suivants (autrement dit, prendre le complément du nombre à la première puissance de 10 qui lui est supérieure). De plus, si le nombre commence par ¬, on l’enlève, sinon on l’ajoute.

Cet algorithme découle du fait que zéro peut toujours s’écrire $\neg 9..9\underline{0}$ avec autant de 9 que l’on veut. On peut donc développer vers la gauche la notation du zéro jusqu’à ce qu’elle soit suffisamment longue pour s’accorder avec le nombre que l’on veut y soustraire.

Par exemple l’opposé de 35720 est

$$\begin{array}{lr} & \neg 9999\underline{0} \\ - & 35720 \\ = & \neg 6427\underline{0} \\ = & \neg 64280 \end{array}$$

(Effectivement -100000 + 64280 = -35720)

C’est ici que l’on peut remarquer que ¬ pouvant être développé à gauche à l’infini, on pourrait l’écrire

¬ = ...9999

Autrement dit, le nombre -1 peut être représenté par une infinité de 9, en notation positionnelle conventionnelle ! C’est le résultat le plus amusant de cette petite expérimentation.

Il se trouve que cette identité existe aussi dans le cadre des nombres 10-adiques, une autre façon d’étendre la notion de notation positionnelle. On peut donc penser qu’elle est tout-à-fait acceptable.

3. Addition généralisée

Deuxième avantage, la notation fluide permet de représenter un nombre négatif sans le marquer d’un symbole particulier comme le signe -. En effet, ¬ n’est pas un signe, c’est un chiffre. En conséquence, il est possible de transformer n’importe quelle soustraction par une addition.

Si l’on revient à l’exemple précédent :

$$\begin{array}{lr} & 407 \\ - & 238 \end{array}$$

peut s’écrire en substituant ¬762 à -238, et l’on a donc

$$\begin{array}{lr} & 407 \\ + & \neg 762 \\ = & \neg\underline{1}69 \\ = & 169 \end{array}$$

(la dernière substitution est justifiée, rappelons-le, par le résultat que $\neg\underline{n} = n$ pour tout chiffre n).

Cet exemple illustre aussi le fait qu’un nombre dont la notation fluide commence par ¬ n’est pas nécessairement négatif. Il ne l’est que si le chiffre suivant est inférieur à <u>0</u>, c’est à dire inférieur ou égal à 9.

Qu’en est-il de l’addition de nombres négatif ?
Il faut alors remarquer que ¬ + ¬ = ¬8 (c’est-à-dire -2).

On a donc, par exemple :

```
       ¬389
+      ¬762
=     ¬8041
```

Vérifions-le. ¬389 est le nombre -611, et ¬762 est le nombre -238. Leur somme vaut donc -849.

Le nombre ¬8<u>041</u> peut aussi s’écrire ¬9151, que l’on simplifie en ¬151 puisque ¬9 = ¬
Or, ¬151 est bien le nombre -849.

On peut aussi transformer une addition de nombres positif en soustraction. Essayons avec

```
      447
+     667
```

667 pouvant s’écrire -¬333, on a donc, en utilisant dans la colonne de gauche la relation 0 - ¬ = 1,

```
       447
-     ¬333
=     1114
```

4. L’expansion infinie du chiffre ¬

Nous avons vu que ¬ représente le nombre -1, et qu’il peut être étendu infiniment à gauche en lui ajoutant des 9. Vérifions-le en posant une addition :

```
      350
+       ¬
```

Elle peut s’écrire

```
       350
+     ¬999
=     ¬249
=      249
=      349
```

On peut visualiser l’identité ¬<u>2</u> = 2 (que nous venons d’utiliser ci-dessus) de façon assez frappante, en exprimant ¬ sous la forme d’une infinité de 9.

En effet,

¬<u>2</u> = ...9999<u>2</u>

= ...999$\underline{0}$2
= ...99$\underline{0}$02
= ...9$\underline{0}$002

où l’on voit que les 9 ne pèsent pas tant que ça dans la représentation, car il sont balayés jusqu’à l’infini par un $\underline{0}$ qui va caser son unité de dizaine à sa gauche et se propage ainsi, laissant 0 derrière lui. Il faut imaginer ce balayage sans fin, ce qui justifie l’idée que le $\underline{0}$ voyageur (en fait une retenue additive) ne s’épuisant jamais, compense donc exactement l’infinité des 9 qu’il écrase sur son passage, et que ces 9 ne valaient donc bien que -10 à eux tous.

On voit de la même façon pourquoi l’opposé de 53 est ¬47 :

$$
\begin{array}{lr}
 & 53 \\
+ & \ldots 9947 \\
= & \ldots 999\underline{0} \\
= & \ldots 99\underline{0}0
\end{array}
\quad \text{etc.., donc = 0}
$$

Enfin, la relation ¬ + ¬ = ¬8 (qui se démontre directement par -1 + -1 = -10 + 8) peut se retrouver en considérant encore ¬ comme ...9999 puisque

$$
\begin{array}{lr}
 & \ldots 9999 \\
+ & \ldots 9999 \\
= & \ldots 9998
\end{array}
$$

Résumé et identités remarquables

Les chiffres $\underline{0}$, $\underline{1}$, $\underline{2}$, $\underline{3}$, $\underline{4}$, $\underline{5}$, $\underline{6}$, $\underline{7}$, $\underline{8}$ représentent les nombres de 10 à 18.

1*n* = $\underline{n}$ pour tout chiffre *n*
$M\underline{n} = Nn$ pour tout nombre *N* et tout chiffre *n*, où $M = N - 1$
$Pn = N\underline{n}$ pour tout nombre *N* et tout chiffre *n*, où $P = N + 1$

Le chiffre ¬ représente le nombre négatif -1 et ne s’utilise que dans la colonne de gauche.

¬ = ¬9

¬ + ¬ = ¬8
0 + ¬ = ¬
0 - ¬ = 1

¬$\underline{n}$ = *n* pour tout chiffre *n*
N = ¬$\underline{0}$*N* pour tout nombre *N*

L’opposé d’un nombre *N* de *n* chiffres peut s’écrire ¬*Q* où *Q* est le complément à 10^n de *N*.
(et de la même façon, l’opposé du nombre ¬*N* peut s’écrire *Q*)

Stéphane Rollandin
hepta@zogotounga,net

(septembre 2024)